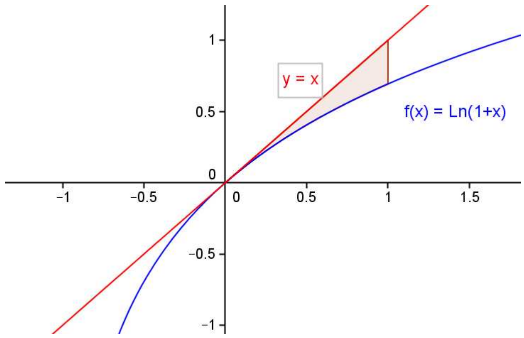
Opción A

Ejercicio nº 1 de la opción A del modelo 6 del 99

(a) [1 punto] Dibuja la región limitada por la gráfica de la función $f:[0,1] \to R$ definida por $f(x)=Ln(1+x)$, la recta tangente a la gráfica de f en el origen y la recta x=1.
(Nota: Ln(t) es el logaritmo neperiano de t).
(b) [1'5 puntos] Halla el área de dicha región.

Solución

(a)
$f(x) = \ln(1+x)$; $f'(x) = 1/(x+1)$; $f(0) = \ln(1) = 0$; $f'(0) = 1/(0+1) = 1$
Recta tangente en x = 0 es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Es decir $y - 0 = 1(x - 0)$, simplificando $y = x$
La gráfica de ln(1+x) (en rojo) es igual que la de ln(x) pero desplazada una unidad a la izquierda . La gráfica de y = x (en rojo) es una recta y con dos valores es suficiente.



(b)
Recordamos que $\int \ln(x)dx = x.\ln(x) - x$, por tanto $\int \ln(x+1)dx = (x+1).\ln(x+1) - (x+1)$.

$$Área=\int_0^1 (x-\ln(1+x))dx=\left[\frac{x^2}{2}-((x+1)\ln(x+1)-(x+1))\right]_0^1 = 1/2 - (2\ln(2) -2) - (0 - (0 - 1))=3/2 - 2\ln(2) \approx 0 '1137 \text{ u.a.}$$

Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 6 del 99

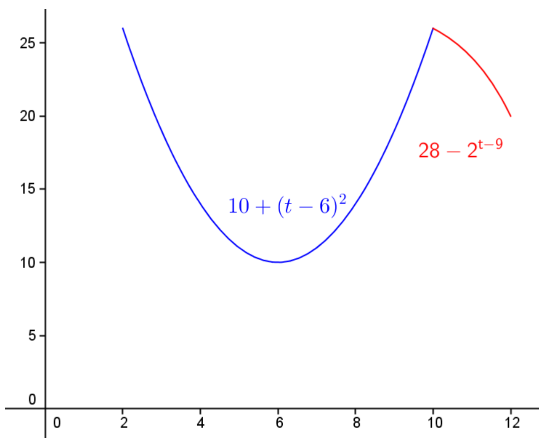
La población de una colonia de aves evoluciona con el tiempo t, medido en años, según la función

$$P : [2,12] \to R \text{ dada por } P(t)=\begin{cases} 10+(t-6)^2 & \text{si } 2 \le t \le 10 \\ 28-2^{t-9} & \text{si } 10 < t \le 12. \end{cases}$$

(a) [1'5 puntos] Representa gráficamente la fución P e indica en qué periodos de tiempo crece o decrece la población.
(b) [0'5 puntos] Indica los instantes en los que la población alcanza los valores máximo y mínimo..
(c) [0'5 punto] Si la población evolucionara a partir de t=12 con la misma función que para $10< t \le 12$, ¿llegaría a extinguirse? Justifica la respuesta dando, en caso afirmativo, el instante de la extinción

Solución

(a)
La gráfica de $10 + (t - 6)^2$ es la misma que la de la parábola t^2 pero desplazada 6 unidades a la derecha en abcisas y 10 hacia arriba en ordenadas.
La gráfica de $28 - 2^{t-9}$, es la misma que la de -2^t , pero desplazada 9 unidades hacia la derecha en abcisas y 28 hacia arriba en ordenadas



$$P'(t)=\begin{cases} 2(t-6) & \text{si } 2<t<10 \\ -2^{t-9} & \text{si } 10<t<12 \end{cases}$$

Si t > 6 y t < 10, P '(t) > 0 luego P(t) crece
Si t < 6, P '(t) < 0, luego P(t) decrece
Si 10< t < 12, como $2^a > 0$, resulta que $-2^a < 0$, luego P(t) decrece
(b)
En t = 6 hay un mínimo. Veamos las valores de P(t) en 2, 5, 10 y 12. El mayor será el máximo absoluto y el menor será el mínimo absoluto
P(2) = 26
P(6) = 10
P(10) = 26
P(12) = 20,
Por tanto alcanza el máximo absoluto en x = 2 y x = 10 y vale 26. Alcanza su mínimo absoluto en x = 6 y vale 10.
(c)
Si t > 10, $P(t) = 28 - 2^{t-9}$.
La población llegaría a extinguirse si P(t) = 0, es decir $28 = 2^{t-9}$, es decir $t - 9 = \log_2(28)$, por tanto se extinguiría cuando $t = 9 + \log_2(28) \approx 13'80735$ años

Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 6 del 99

Sea C la matriz, que depende de un parámetro m, dada por $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C?
(b) [1 punto] Calcula la matriz inversa de C para m=2.

Solución

(a)
La matriz C no tiene inversa sii |C| = 0

$$|C|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+m\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1+m=0$$

por tanto con m = - 1, la matriz C no tiene inversa.
(b)
Inversa de C para m=2.

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad |C|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+2=3\ ;\quad C^{-1}=\frac{1}{|C|}\mathrm{Adj}(C^t)$$

$$C^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathrm{Adj}(C^t)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \text{luego}\ C^{-1}=\frac{1}{|C|}\mathrm{Adj}(C^t)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4 de la opción A del modelo 6 del 99

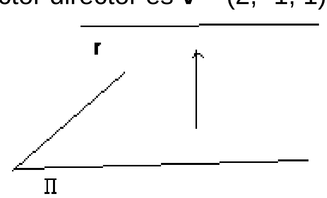
Sea Π el plano de ecuación Π≡3x-2y-6z=1 y sea r la recta dada en forma paramétrica por

$$r \equiv (x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(2,-1,1) \quad (\lambda \in \Re)$$

(a) [0'5 puntos] ¿Cómo se define la relación de paralelismo entre una recta y un plano?
(b) 0'75 puntos] En el caso concreto de la recta r y el plano Π, ¿cómo averiguarías si son paralelos? Comprueba si lo son.
(c) [0'5 puntos] ¿Cómo se define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano?
(d) 0'75 puntos] En el caso concreto de la recta r y el plano Π, ¿cómo averiguarías si son perpendiculares? Comprueba si lo son.

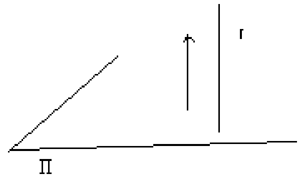
Solución

(a)
Π≡3x-2y-6z=1, su vector normal es **n** = (3, -2, 6)
$r \equiv (x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(2,-1,1)$ $(\lambda \in \Re)$ su vector director es **v** = (2, -1, 1)



r || Π sii **v** ⊥ **n** sii **v.n** = 0

(b)
v.n = (2, -1, 1). (3, -2, 6) = 2 $\neq$ 0, por tanto no son paralelos la recta y el plano.
(c)



r $\perp$ Π sii **v** || **n** sii **v.n** $\neq$ 0 sii **v** = λ.**n**
(d)
como (2, -1, 1) $\neq$ λ(3, -2, 6), la recta y el plano no son perpendiculares.

Opción B

Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 6 del 99

[2'5 puntos] Sea f : R → R la función dada por $f(x)= ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en Q=(-1,3) y que la tangente a dicha gráfica en el punto M=(0,1) es horizontal.

Solución

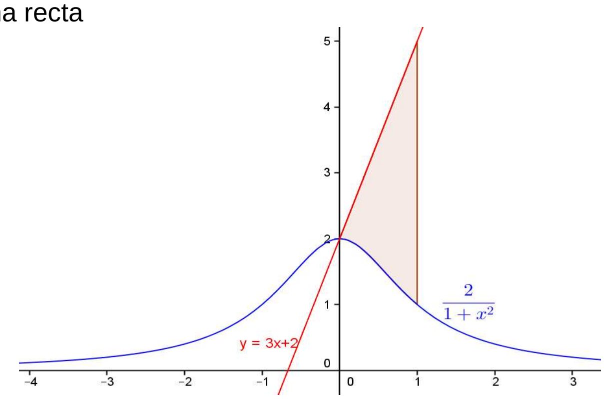
$f(x)= ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$ $f''(x) = 6ax+2b$
Q(-1, 3) punto de inflexión por tanto f(-1) = 3 y f ''(-1) = 0
M(0,1) tangenc8ia horizontal, por tanto f(0) = 0 y f '(0) = 0
De f(-1) = 3 obtenemos 3 = -a+b-c+d
De f(0) = 1 obtenemos 1 = d
De f '(0) = 0 obtenemos 0 = c
De f ''(-1) = 0 obtenemos 0 = -6a+2b
Por tanto a = 1, b = 3, c = 0 y d = 1

Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 6 del 99

[2'5 puntos] Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y=\dfrac{2}{1+x^2}$ y las rectas de ecuaciones x = 1 e y = 3x+2

Solución

$y=\dfrac{2}{1+x^2}$ tiene como asíntota horizontal y = 0 en ±∞, porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{1+x^2}=0$
Es par porque f(-x) = f(x)
Corta en (0,2) que es máximo
La gráfica de y = 3x+2 es una recta



Tenemos que ver donde se cortan la gráfica de $y = 2/(1+x^2)$ con la recta y = 3x+2, para lo cual lo igualamos $2/(1+x^2) = 3x+2$, operando obtenemos $0 = 3x^3+2x^2+3x = x(3x^2+2x+3) = 0$ de donde x = 0, pues la ecuación de 2º grado no tiene soluciones reales.

$$\text{Área}=\int_0^1\left[(3x+2)-\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\right]dx=\left[3\frac{x^2}{2}+2x-2\text{artg}(x)\right]_0^1 = [3/2 +2 - 2\text{artg}(1)] - (0 - 2\text{artg}(0)) = 3/2 +2 - 2.\pi/4$$

$= (7 - \pi)/2 \cong 1'93$ u.a.

Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 6 del 99

Considera el punto P=(-1,2,1)

(a) [1 punto] Determina un punto Q del plano $\Pi \equiv -3x+y+z+5=0$ de forma que el vector PQ sea perpendicular al plano Π.

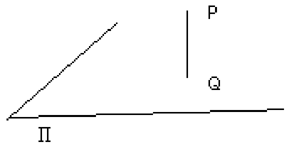
(b) [1 punto] Determina un punto M de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-10}{-1}$

de forma que el vector MP sea paralelo al plano Π.

(c) [0'5 puntos] Calcula el área del triángulo MPQ.

Solución

(a)



$\Pi \equiv -3x+y+z+5 = 0$, su vector normal es **n=**(-3,1,1)

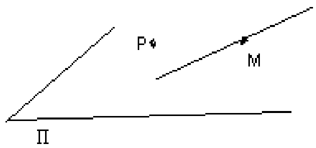
la recta s $\perp$ a Π por P es

$$s \equiv \frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}=\lambda \quad \equiv \quad \begin{cases} x=-1-3\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

$Q = \Pi \cap s$

$-3(-1-3\lambda)+(2+\lambda)+(1+\lambda)+5 = 0$. Operando se obtiene $11\lambda + 11 = 0$, de donde $\lambda = -1$, y el punto Q sería $Q(-1-3(-1), 2+(-1), 1+(-1)) = Q(2, 1, 0)$ que es el punto pedido

(b)



$r \equiv \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+10}{-1}=\lambda$, luego $M(2-\lambda, -1+\lambda, 10-\lambda)$. $\Pi \equiv -3x+y+z+5 = 0$, su vector normal es **n=**(-3,1,1)

Si $\vec{MP} \parallel \Pi$, entonces $\vec{MP} \perp$ **n,** con lo cual $\vec{MP}\cdot\vec{n}=0$

$\vec{MP} = (-1-2+\lambda, 2+1-\lambda, 1-10+\lambda)$

$\vec{MP}\cdot\vec{n}=0 = -3(-3+\lambda)+1(3-\lambda)+1(-9+\lambda)$, de donde $\lambda = 1$ y $M(2-1, -1-1, 10-1) = (1,-2,9)$

(c)

Como el triángulo MPQ es rectángulo el área es ½ de cateto por cateto, es decir

$$\text{Área}=\frac{1}{2}\left|\vec{PQ}\right|.\left|\vec{PM}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{9+1+1}.\sqrt{4+16+64}=\frac{1}{2}\sqrt{924}\text{ u.a.}. \quad \vec{PQ}=(3,-1,-1),\quad \vec{PM}=(2,-4,8)$$

Ejercicio nº 4 de la opción B del modelo 6 del 99

[2'5 puntos] En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

- El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos y su precio es de 565 ptas.
- El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos y su precio es de 740 ptas.

Con estos datos, ¿podrías averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso? Justifica la respuesta

Solución

x = cerveza   y = cacahuetes   z = vasos

$1x + 3y + 7z = 565$

$1x + 4y + 10z = 740$.   Piden $x + y + z$

Restando obtengo **y + 3z =175**. Sustituyo

$x + 3(175-3z) + 7z = 565$

$x + 4(175-3z) + 10z = 740$, de donde **x –2z = 40**

Sumando las dos expresiones en negrita obtenemos $y + 3z + x - 2z = 175 + 40$, de donde

$x + y + z = 215$.